Probabilidad

1. Conceptos previos

Teoría de conjuntos. Conceptos básicos

Dado un conjunto M, se llama **conjunto de partes de M,** y se denota por $\mathcal{P}$(M), al conjunto de todos los subconjuntos de M (incluido el conjunto vacio, $\emptyset$, conjunto que no contiene ningún elemento).

Unión de conjuntos. Si A y B son elementos de $\mathcal{P}$(M) se llama unión de A y B al conjunto que se designa por $A \cup B$ y definido por:

$$A \cup B = \{x: x \in M \text{ y } (x \in A \text{ o } x \in B)\}$$

Intersección de conjuntos. Si A y B son elementos de $\mathcal{P}$(M) se llama intersección de A y B al conjunto que se designa por $A \cap B$ y definido por:

$$A \cap B = \{x: x \in M \text{ y } (x \in A \text{ y } x \in B)\}$$

Propiedades de $\cup$ e $\cap$. Para todo A, B y C pertenecientes a $\mathcal{P}$(M), se verifican las siguientes propiedades:

Conmutativa:	$A \cup B = B \cup A$	y	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa:	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	y	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Idempotencia:	$A \cup A = A$	y	$A \cap A = A$
Absorción:	$A \cup (A \cap B) = A$	y	$A \cap (A \cup B) = A$
Elemento neutro:	$A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$	y	$A \cap M = M \cap A = A$

Es decir, $\emptyset$ es el elemento neutro de $\cup$ y M es el elemento neutro de $\cap$.

Propiedades distributivas:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Complementario de un conjunto de $\mathcal{P}$(M). Si A $\in$ $\mathcal{P}$(M) se llama complementario de A respecto a M y se representa por $\overline{A}$ o A^c al conjunto:

$$\overline{A} = \{x: x \in M,\ x \notin A\}$$

Propiedades del complementario de un conjunto. Para todo A $\in$ $\mathcal{P}$(M) se verifica:

a)	$A \cup \overline{A} = M$	y	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	
b)	$\overline{\emptyset} = M$	y	$\overline{M} = \emptyset$	
c)	$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$	y	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$	**LEYES DE MORGAN**

El conjunto M se llama **conjunto universal.**

Probabilidad. Conceptos básicos

Definiciones

- Se llama **prueba** o **experiencia E** o **experimento aleatorio** a todo procedimiento o método que permite seleccionar un elemento de un conjunto M.

- El conjunto M se llama **conjunto de resultados posibles o elementales** o **conjunto universal**, y se dice que M es el **espacio muestral de E**. Cada elemento de M es un **resultado de E**. Cada elemento de $\mathcal{P}$(M) es un **suceso de E**.

- Se dice que **se ha verificado el suceso H** al realizar una prueba si el resultado de esa prueba es un elemento de H.

Operaciones con sucesos. Si E es una prueba, M su conjunto de resultados y A y B son sucesos de $\mathcal{P}$(M), se define:

- **Unión de dos sucesos A y B** es el suceso que se verifica cuando al realizar una prueba se verifica A o se verifica B. El suceso unión de A y B está definido por el conjunto $A \cup B$ de $\mathcal{P}$(M) y se designa también por $A \cup B$.

- **Intersección de dos sucesos A y B** es el suceso que se verifica cuando al realizar una prueba se verifica A y también B. El suceso intersección de A y B está definido por el conjunto $A \cap B$ de $\mathcal{P}(M)$ y se designa también por $A \cap B$.

- **Suceso complementario de un suceso A** es el que se verifica cuando al realizar una prueba no se verifica A. Se designa por $\overline{A}$ o A^c y está definido por el conjunto complementario de A en $\mathcal{P}(M)$.

- **Suceso imposible** es el correspondiente al conjunto vacio, $\emptyset$.

- **Suceso cierto o seguro** es el correspondiente al conjunto M.

- Dos sucesos A y B son **incompatibles** si no se pueden verificar en una misma prueba, es decir, sí $A \cap B = \emptyset$.

De las definiciones anteriores resulta que las operaciones con sucesos cumplen las mismas propiedades que las operaciones con conjuntos.

Frecuencia de un suceso. Sea E una prueba y M el conjunto de resultados de E y se realiza n veces la prueba E. Si el suceso A se ha verificado m veces, entonces:

- Al número m se le llama **frecuencia absoluta de A.**
- Al número m/n se le llama **frecuencia relativa de A.**

2. Probabilidad

Introducción

La definición de probabilidad dada por la siguiente igualdad:

$$p(H) = \frac{n^{o}\text{ de casos favorables a } H}{n^{o}\text{ de casos posibles}}$$

conocida como la regla de Laplace, aunque es suficiente para bastantes aplicaciones, no permite la construcción y el desarrollo de una teoría matemática de la probabilidad. Esta imposibilidad nace de la dificultad que implica la exigencia previa de casos igualmente posibles.

De la misma forma, la noción de probabilidad fundamentada en la estabilidad de las frecuencias relativas obtenidas experimentalmente, aunque útil, tampoco permite la construcción de una teoría. La estabilidad de las frecuencias relativas establece que si en determinados fenómenos se realiza una experiencia, n_1 veces, n_2 veces, ..., n_k veces..., y un suceso H se ha verificado, respectivamente, n'_1 veces, n'_2 veces, ..., n'_k veces ..., entonces las frecuencias relativas de H, es decir, los números n'_1 / n_1 , n'_2 / n_2 , ..., n'_k / n_k , ..., tienden a ser iguales entre sí cuando n_k es muy grande. Este número, al cual tienden las frecuencias cuando aumenta el número de experiencias, puede llamarse probabilidad de H.

El objetivo del cálculo de probabilidades es construir un modelo matemático adecuado para describir el comportamiento de un fenómeno, que permita su mejor conocimiento y por tanto su control. En particular, el cálculo de probabilidades permitirá una cuantificación del grado de posibilidad de realización o no de un hecho o suceso, lo cual facilitará las tareas futuras a efectos de predicción y decisión.

Definición axiomática de probabilidad

Se llama **probabilidad** a toda aplicación p definida en $\mathcal{P}(M)$ y con valores en [0,1] tal que

1) $p(M) = 1$
2) Si $A_1, \ldots, A_n$, son sucesos incompatibles: $p(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)$

Propiedades

Si p es una probabilidad se verifica que:

1) $p(\emptyset) = 0$
2) $\forall\ H \in \mathcal{P}(M) \quad \Rightarrow \quad p(\overline{H}) = 1 - p(H)$
3) Si $H, K \in \mathcal{P}(M)$ y $H \subset K \quad \Rightarrow \quad p(H) \leq p(K)$
4) $\forall\ H, K \in \mathcal{P}(M) \quad \Rightarrow \quad p(H \cup K) = p(H) + p(K) - p(H \cap K)$

La propiedad 4) se puede generalizar, por inducción, a n sucesos.

Probabilidad condicionada

Definición

Se llama **suceso B condicionado a A** y se escribe **B|A** al suceso que se verifica cuando habiéndose verificado A también se verifica B.

Definición

Si p es una probabilidad y si B es un suceso de $\mathcal{P}$(M), tal que p(B) ≠ 0, se llama **probabilidad condicionada a B** a la aplicación de $\mathcal{P}$(M) en [0,1] que designaremos por p(|B) y que se define para todo X ∈ $\mathcal{P}$(M) de la forma siguiente,

$$p(X \mid B) = \frac{p(X \cap B)}{p(B)}$$

Consecuencia: Si A y B son dos sucesos de $\mathcal{P}$(M) y p(B) ≠ 0, entonces:

$$P(A \cap B) = p(B)\, p(A|B)$$

o

$$P(A \cap B) = p(A)\, p(B|A)$$

En general:

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2 \mid A_1)p(A_3 \mid A_1 \cap A_2) \ldots p(A_n \mid A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

Definición. Dos sucesos A y B son **independientes** si p(A) = p(A|B).

Es decir, cuando la ocurrencia de uno de ellos no nos dice nada nuevo sobre la ocurrencia del otro.

Consecuencia: Si A y B son independientes se verifica que p(A ∩ B) = p(A) p(B).

En general, si $A_1, \ldots, A_n$ son independientes entonces

$$p(A_1 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1)p(A_2) \ldots p(A_n)$$

Teorema de la probabilidad total

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ un sistema completo de sucesos, por tanto verifican que

1) $A_1 \cup \ldots \cup A_n = M$
2) Son incompatibles dos a dos, es decir, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$

Si $p(A_i) \neq 0$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, n$ y B es un suceso cualquiera, entonces se verifica que

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B \mid A_i)$$

Teorema de Bayes

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ es un sistema completo de sucesos con $p(A_i) \neq 0$, $\forall$ i = 1, 2, ..., n y B es un suceso cualquiera, entonces

$$p(A_k \mid B) = \frac{p(A_k)p(B \mid A_k)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B \mid A_i)}$$

Ejercicios

1. Se conoce la siguiente información relativa a los sucesos A, B y C:
$P(A \cup B) = 0{,}92$, $P(A \cap B) = 0{,}48$, $P(A|B) = 0{,}80$, $P(B \cup C) = 0{,}76$ y $P(B|C) = 0{,}60$.

a) Calcular las probabilidades de los sucesos: A, B, C, $\overline{A} \cap \overline{B}$ y $\overline{A}|B$
b) ¿Son incompatibles B y C?
c) ¿Son independientes B y C?

2. Un equipo de expertos debe evaluar el nivel de calidad de tres tipos A, B y C de preparados alimenticios, calificándolos como “aptos” o “no aptos”. Se procede a la inspección de un número determinado de preparados de los cuales el 30% son del tipo B y el 50% del tipo C. Tras un mes de trabajo se presenta un informe con las siguientes conclusiones: Se consideran “aptos” el 40% de los preparados del tipo A, el 30% del tipo B y el 20% del tipo C. Calcular la probabilidad de calificar como “apto” un preparado cualquiera.

3. Una fábrica que produce un determinado producto alimenticio dispone, para su envasado, de tres máquinas, M1, M2 y M3, que envasan el 30%, el 45% y el 25%, respectivamente, de la producción total. Se sabe, por controles de calidad previos, que el 2%, el 3% y el 2%, respectivamente, de los paquetes envasados por cada máquina es defectuoso por no contener la cantidad indicada. Se elige al azar un paquete que resulta ser defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que esté envasado por la máquina M3?

4. En una región el número de machos de una determinada raza de conejos es el doble que el número de hembras. Hay una epidemia, el 6% de los machos y el 11% de las hembras están enfermos. Se elige al azar un individuo, calcular:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté enfermo?.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea macho sabiendo que está enfermo?

5. En toda la Unión Europea los huevos se clasifican en cuatro categorías, dependiendo del peso que tienen en: S (pequeños), M (medianos), L (grandes) y XL (supergrandes). En una central se reciben huevos de dos granjas. El 30% de los huevos proceden de la granja A y el 70% restante de la granja B. Se sabe también que:
En la granja A, el 44% de los huevos son de tamaño M y el 15% de tamaño S.
En la granja B, el 33% de los huevos son de tamaño M.
Se elige un huevo al azar en la central, resultando ser de tamaño M. ¿De qué granja es más probable que proceda?

6. Una prueba para la detección de un tipo de cáncer, detecta el 67% de los casos con cáncer diagnosticado y un 4% entre los que no tienen cáncer. Se estima que en la población examinada, el 30% presenta este tipo de cáncer. Calcular

a) La probabilidad de que un individuo tenga cáncer y la prueba de negativa.
b) La probabilidad de que un individuo no padezca este tipo de cáncer supuesto que la prueba ha dado positiva.

7. Para estudiar como afectan tres enfermedades A, B y C a madres e hijos de una determinada raza de animales, en la tabla siguiente se recoge la información relativa a un gran grupo de animales, en la que solo hay madres e hijos, todos enfermos por una de estas tres enfermedades.

	A_2	B_2	C_2
A_1	0,45	0,48	0,07
B_1	0,05	0,70	0,25
C_1	0,01	0,50	0,49

Se ha denotado a las generaciones por subíndices, de tal forma que por ejemplo, A_1 representa el suceso "una madre tiene la enfermedad A" y A_2 representa el suceso "un hijo tiene la enfermedad A", de forma análoga para las enfermedades B y C. La tabla anterior da probabilidades condicionadas, por ejemplo, $0{,}45 = p(A_2|A_1)$ denota la probabilidad de que un hijo tenga la enfermedad A, supuesto que la madre tenía también la enfermedad A. Se sabe que en la generación de las madres el 10 % tienen la enfermedad A, el 40 % la enfermedad B y el 50 % la enfermedad C.
¿Cuál es la probabilidad de que un hijo tenga la enfermedad A?

8. Uno de los síntomas de una determinada enfermedad es la repentina subida de la glucosa en la sangre. La probabilidad de padecer la enfermedad es 0.1. Teniendo la enfermedad, la probabilidad de que se dé una subida repentina de la glucosa es 0.95. La probabilidad de que se dé dicho síntoma sin padecer la enfermedad es 0.03. Hallar:

a) Probabilidad de padecer la enfermedad y que no se dé el síntoma.
b) Probabilidad de que una persona asintomática, esté enferma.

9. Un laboratorio proyecta lanzar un medicamento, del cual, ya existen en el mercado dos marcas A y B. Se sabe que a la hora de comprar este medicamento el 30% elige la marca A, el 50% la marca B y el 10% compran A y B. Para decidir si compensa lanzar la nueva marca, el laboratorio necesita conocer la probabilidad de que no se compren ni A ni B.